КЛУМБОВЫЙ ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИК

И.Г. Малышев,
ГБОУ ДПО НИРО (г. Нижний Новгород)
e-mail: mlgniro@mail.ru

I.G. Malyshev,
GBOY DPO NIRO (Nizhny Novgorod)
e-mail: migniro@mail.ru

Ключевые слова: четырёхугольник, радиусы вписанной и описанной окружностей, площадь четырёхугольника, точки касания, вневписанная окружность, радиус вневписанной окружности.

Keywords: quadrilateral, incircle radius, circumcircle radius, quadrilateral area, point of tangency, excircle, excircle radius.

Аннотации: в статье рассматриваются свойства вписанного и одновременно описанного четырёхугольника. Равнобедренная трапеция как частный случай этого четырёхугольника встречается в заданиях ЕГЭ.

Annotation: properties of bicentric quadrilaterals are considered in this paper. Isosceles trapezoid as a special case of such quadrilaterals are often included into the tasks of Unified State Exam.

Четырёхугольники бывают вписанные, описанные, выпуклые и пр. Некоторые имеют собственные названия. Но среди них есть интересный четырёхугольник, который вписан и одновременно описан. Назовём такой «законопослушный» четырёхугольник клумбовым. Отметим, что клумбовые четырёхугольники существуют. Таковыми, например, будут все квадраты, а также равнобедренные трапеции, у которых сумма оснований равна сумме боковых сторон. Однако есть много клумбовых четырёхугольников достаточно произвольной формы. Покажем, что можно построить клумбовый четырёхугольник, если известны его сторона и два прилежащих к ней угла. Алгоритм построения несложен. Пусть дана сторона AB и два прилежащих угла α и β (рис. 1).

Построив биссектрисы этих углов, получим центр вписанной окружности O, а затем (опустив перпендикуляры на стороны AB, BC, AD) и её радиус $OP = OQ = OT$. При этом P, Q, T – это точки касания вписанной окружности со сторонами четырёхугольника. Далее, так как сумма противоположных углов четырёхугольника равна $180°$, то учитывая, что радиусы перпендикулярны сторонам, получаем равенство углов: $\angle FOT = \beta$, $\angle FOQ = \alpha$. Значит, в точке O следует построить угол α, отложив его от стороны OQ. Таким образом, получаем точку касания F, после чего строим оставшуюся сторону четырёхугольника CD.

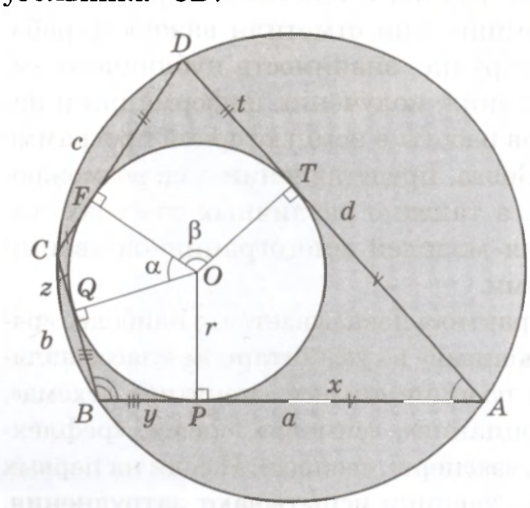

Рис. 1

Столь же просто строится клумбовый четырёхугольник, если известны радиус вписанной в него окружности и два угла четырёхугольника, прилежащих к одной стороне. В этом случае строим три радиуса OT, OF, OQ так, чтобы $\angle FOT = \beta$, а $\angle FOQ = \alpha$, а затем строим угол $\angle TOP = 180° - \alpha$. Получив все точки касания, достраиваем сам четырёхугольник.

Остановимся теперь на метрических соотношениях, связывающих элементы клумбового четырёхугольника. Для этого составим систему равенств:

$$\begin{cases} b + d = a + c \\ bd + ac = d_1 d_2 \\ b^2 + d^2 - (a^2 + c^2) = 2d_1 d_2 \cos\varphi, \end{cases}$$

где первое уравнение – это условие вписанности окружности в четырёхугольник, второе – теорема Птолемея для вписанного четырёхугольника, а третье легко может быть получено, если записать теорему косинусов для четырёх треугольников, на которые наш четырёхугольник разбивается своими диагоналями (φ – угол между диагоналями d_1 и d_2, лежащий напротив стороны a). Возведя в квадрат первое уравнение, получим равенство:

$$b^2 + d^2 - (a^2 + c^2) = 2ac - 2bd.$$

Тогда система приобретает вид

$$\begin{cases} bd + ac = d_1 d_2 \\ ac - bd = d_1 d_2 \cos\varphi. \end{cases}$$

Складывая эти уравнения и вычитая из первого второе, получим систему

$$\begin{cases} ac = d_1 d_2 \cos^2 \dfrac{\varphi}{2} \\ bd = d_1 d_2 \sin^2 \dfrac{\varphi}{2}. \end{cases}$$

Наконец, разделив одно уравнение на другое, получим соотношение $\dfrac{bd}{ac} = \operatorname{tg}^2 \dfrac{\varphi}{2}$, выражающее угол между диагоналями через стороны четырёхугольника. Если же перемножить уравнения системы, то получится равенство $abcd = d_1^2 d_2^2 \dfrac{\sin^2\varphi}{4}$, из которого вытекает формула площади четырёхугольника

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi = \sqrt{abcd} \qquad (1)$$

– это та единственная формула, которую можно встретить в литературе для этого вида четырёхугольников.

Выразим теперь стороны клумбового четырёхугольника через радиус вписанной окружности и два известных угла α и β. Обозначив $AP = x$, $BP = y$, $CQ = z$, $DT = t$ (рис. 1), получим:

$$x = r \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}, \quad y = r \cdot \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2},$$

$$z = r \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \quad t = r \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}. \qquad (2)$$

Из последних соотношений легко получаем формулы для сторон четырёхугольника:

$$a = r \cdot \left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right), \quad b = r \cdot \left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right),$$

$$c = r \cdot \left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right), \quad d = r \cdot \left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right). \qquad (3)$$

Кроме того, учитывая, что

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{\sin\alpha} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = \frac{2}{\sin\beta},$$

находим полупериметр и площадь клумбового четырёхугольника

$$p = 2r\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}\right),$$

$$S = 2r^2\left(\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha \sin\beta}\right). \qquad (4)$$

Выразим теперь радиус описанной около нашего четырёхугольника окружности. Из теоремы синусов следует, что $d_1 = 2R\sin\alpha$ и $d_2 = 2R\sin\beta$. Найдём сумму произведений противоположных сторон, воспользовавшись полученными выше формулами:

$$ac + bd = 4r^2 + r^2\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right).$$

После подстановки в формулу из теоремы Птолемея и тригонометрических преобразований получаем формулу для радиуса описанной окружности:

$$R = r\cdot\frac{\sqrt{1+\sin\alpha\cdot\sin\beta}}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}. \qquad (5)$$

Если обозначить произведение синусов $\sin\alpha\cdot\sin\beta = t,\ t\in(0;\,1]$ то

$$R = r\frac{\sqrt{1+t}}{t} = r\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}},$$

откуда следует, что $R \geq r\sqrt{2}$, причём равенство возможно только для квадрата.

Записав формулы для сторон в несколько ином виде

$$a = r\cdot\frac{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin\dfrac{\beta}{2}},\quad b = r\cdot\frac{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin\dfrac{\beta}{2}},$$

$$c = r\cdot\frac{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\beta}{2}},\quad d = r\cdot\frac{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\beta}{2}},$$

получаем дополнительные соотношения для данных четырёхугольников

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{bd}{ac}} = \frac{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}},\quad \frac{b}{d} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2},$$

$$\frac{c}{a} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$$

(аналогичная формула для трапеции приводится в задаче 6.7 из известного сборника [1]).

Четырёхугольники *APOT, PBQO, QCFO, FDTO* являются дельтоидами, площади которых, соответственно, равны: $S_1 = xr$, $S_2 = yr$, $S_3 = zr$, $S_4 = tr$. Учитывая соотношения (2), получаем следующие равенства

$$S_1\cdot S_3 = S_2\cdot S_4 = r^4,$$
$$S_1 + S_3 = S_2 + S_4 = S,$$

$$\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} + \frac{1}{S_4} = \frac{S}{r^4}. \qquad (6)$$

Следующий набор формул связан с вневписанными окружностями для этих четырёхугольников.

На рисунке 2 показаны два центра O_b и O_c вневписанных окружностей, касающихся, соответственно, сторон b и c. Пусть ρ_b и ρ_c их радиусы, а K – точка касания вневписанной окружности с центром в точке O_c со стороной CD. Тогда $\angle O_cDK = \angle DOF = \dfrac{\beta}{2}$, а $\angle O_cCK = \angle COF = \dfrac{\alpha}{2}$ и, следовательно,

$$c = CK + KD = \rho_c\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right).$$

С учётом равенства (3) получаем:

$$c = r\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right) = \rho_c\cdot\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right),$$

откуда следует, что $\rho_c = r\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}$.

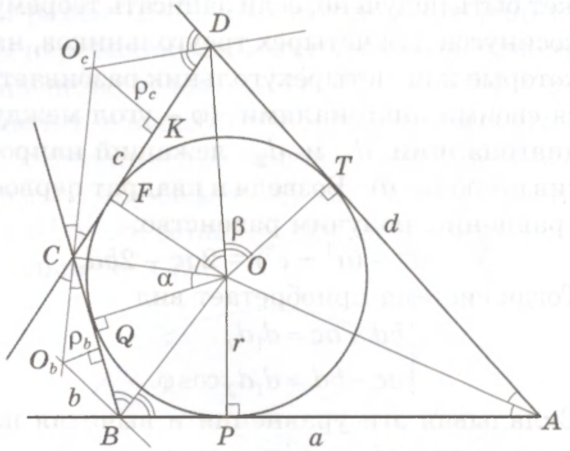

Рис. 2

Аналогично можно получить формулы для других радиусов:

$$\rho_b = r\cdot\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}},\quad \rho_a = \frac{r}{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}},\quad \rho_d = r\cdot\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}.$$

Таким образом, получаем следующие выражения для радиусов вневписанных окружностей:

$$\rho_a \cdot \rho_c = \rho_b \cdot \rho_d = r^2,$$

$$\rho_a + \rho_b + \rho_c + \rho_d = r \cdot f(\alpha, \beta),$$

$$\frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c} + \frac{1}{\rho_d} = \frac{f(\alpha,\beta)}{r},$$

$$\frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c} + \frac{1}{\rho_d} = \frac{\rho_a + \rho_b + \rho_c + \rho_d}{r^2},$$

где

$$f(\alpha,\beta) = \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \mathrm{tg}\frac{\beta}{2} + \frac{1}{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \mathrm{tg}\frac{\beta}{2}} + \frac{\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}}{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}} + \frac{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}}.$$

Полученные выше формулы для этих четырёхугольников позволяют расширить спектр задач и для факультативных занятий, и для занятий по олимпиадной тематике. Формулы выглядят проще в частных случаях. А именно, при равенстве двух углов мы имеем дело с трапецией, а при равенстве одного из углов $90°$ – с дельтоидом.

Литература

1. *Прасолов В.В.* Задачи по планиметрии: В 2 ч. Ч. 1 М.: – Наука. – Физматлит, 1995. – С. 151.